Devoir II — Algèbre linéaire numérique
MAT-4400/7215, Hiver 2026

Salem Nkunda Nyisingize

Mars 2026

1 Exercice 1 : Problème de moindres carrés

a)

Le programme `mgs.m` a été modifié pour compter le nombre d'opérations arithmétiques (`nops`).
On considère le problème de moindres carrés :

$$\min_x \|b - Ax\|_2, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ m > n.$$

On utilise la décomposition QR obtenue par Gram-Schmidt modifié :

$$A = QR,$$

où Q a des colonnes orthonormales ($Q^T Q = I$) et R est triangulaire supérieure. Le problème devient :

$$\|b - Ax\| = \|b - QRx\|.$$

En multipliant par Q^T (transformation isométrique) :

$$Q^T b = Rx.$$

On résout donc le système triangulaire $Rx = Q^T b$, ce qui se traduit en Matlab par :

```
x = R \ (Q' * b);
```

b)

On approxime la dérivée de $f(x) = e^x$ en $x = 0$ par différence finie :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

et on définit l'erreur :

$$E(h) = \left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|.$$

On suppose $E(h) \approx Ch^\alpha$, ce qui donne en prenant le logarithme :

$$\ln E(h) = \ln C + \alpha \ln h,$$

un problème de moindres carrés linéaire de la forme $Ax \approx b$, résolu par la décomposition QR de `mgs.m`.
La solution obtenue dans `Moindrecarre.m` est :

```
x_mgs =
   -2.8550
    0.7287
x_operateur =
   -2.8550
    0.7287
```

La solution QR coïncide avec celle de l'opérateur Matlab `A\b`, ce qui valide l'implémentation. La valeur $\alpha \approx 0.7287$ correspond à l'ordre expérimental de convergence de l'erreur.

2 Exercice 2 : L'algorithme de Householder-Businger-Golub

a) Implémentation de HBG

L'algorithme de Householder-Businger-Golub est implémenté dans `HBG.m`. À chaque étape k, on construit un réflecteur de Householder $H_k = I - 2w_k w_k^T / \|w_k\|^2$ qui annule les entrées sous la diagonale de la colonne k, puis on l'applique implicitement aux colonnes restantes. La sortie est une matrice M de taille $m \times n$ et un vecteur `alpha` de longueur n :

— la diagonale de R est stockée dans `alpha` ;
— la partie triangulaire supérieure stricte de M contient celle de R ;
— la partie triangulaire inférieure de M contient les vecteurs de Householder w_k.

b) Résolution des moindres carrés avec HBG

Le programme `LeastSquaresHBG.m` résout $\min_x \|b - Ax\|_2$ à l'aide des structures M et `alpha` produites par `HBG`. On applique Q^T à b implicitement en appliquant les réflecteurs $H_1, \ldots, H_n$ dans l'ordre :

$$b(k:m) \leftarrow b(k:m) - \frac{2\, w_k^T b(k:m)}{\|w_k\|^2}\, w_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

On reconstruit ensuite R depuis M et `alpha`, puis on résout $Rx = (Q^T b)_{1:n}$ par substitution inverse (`R\c`).

On teste le programme sur le problème d'approximation de la dérivée de $f(x) = e^x$ par différence finie, résolu en `testhouseholder.m`. On obtient :

```
C     = 0.057557
alpha = 0.728688
norm(x_hbg - x2) = 5.7742e-15
```

et

```
x_hbg =
   -2.8550
    0.7287
```

où `x2` est la solution de référence `A\b`. La norme $\sim 10^{-15}$ confirme que `LeastSquaresHBG` coïncide avec l'opérateur Matlab à la précision machine. On retrouve $\alpha \approx 0.7287$ et $C = e^{-2.8550} \approx 0.0576$, cohérents avec les résultats de MGS au point 1(b).

c) Extraction de Q et R — comparaison avec `qr`

Le programme `HBGQR.m` extrait $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ depuis M et `alpha` en appliquant les réflecteurs en ordre inverse ($k = n, \ldots, 1$) à I_m.

Les tests effectués dans `testhouseholder.m` sur des matrices aléatoires $A = \texttt{rand}(m, n)$ donnent :

m	n	orth_HBG	orth_qr	res_HBG	res_qr
6	4	4.44e-16	3.33e-16	2.22e-16	6.66e-16
10	5	3.33e-16	8.88e-16	8.88e-16	4.44e-16
20	8	4.44e-16	4.44e-16	1.89e-15	4.44e-16
50	10	8.88e-16	6.66e-16	3.66e-15	6.94e-16

Toutes les valeurs sont de l'ordre de $\epsilon_{\text{machine}} \approx 2.2 \times 10^{-16}$, ce qui confirme que `HBGQR` est numériquement équivalent à la routine `qr` native de Matlab.

d) Comparaison sur les matrices de Hilbert

Toujours dans `testhouseholder.m`, On compare `HBGQR` et `mgs` sur les $n-1$ premières colonnes de la matrice de Hilbert H_n (mal conditionnée) pour $5 \leq n \leq 12$, en mesurant :

$$\max_{i,j} |(Q^T Q - I)_{ij}| \quad \text{et} \quad \max_{i,j} |(A - QR)_{ij}|.$$

Les tests sont effectués dans `testHouseholder.m` et donnent :

n	orth_HBG	orth_MGS	res_HBG	res_MGS
5	4.44e-16	1.29e-13	2.22e-16	5.55e-17
6	6.66e-16	8.82e-12	4.44e-16	2.78e-17
7	4.44e-16	4.13e-11	4.44e-16	2.78e-17
8	5.55e-16	5.79e-09	2.22e-16	2.78e-17
9	1.22e-15	7.35e-08	5.00e-16	2.78e-17
10	6.66e-16	3.02e-06	1.11e-16	5.55e-17
11	5.55e-16	9.41e-05	2.22e-16	5.55e-17
12	4.44e-16	8.54e-04	2.78e-16	5.55e-17

On observe que :

- **HBG préserve l'orthogonalité** à la précision machine pour tout n, indépendamment du conditionnement.
- **MGS perd l'orthogonalité** de façon croissante : de 1.29×10^{-13} à $n = 5$ jusqu'à 8.54×10^{-4} à $n = 12$.
- Les **résidus** $\max |A - QR|$ sont comparables pour les deux méthodes — le résidu seul ne détecte pas la perte d'orthogonalité.

Conclusion : L'algorithme HBG est numériquement supérieur à Gram-Schmidt modifié pour les matrices mal conditionnées. Les réflecteurs de Householder étant des transformations orthogonales exactes (à la précision machine), ils préservent l'orthogonalité de Q quelle que soit la valeur de $\kappa_2(A)$.

3 Exercice 3 : Les rotations de Givens

(a) Montrer que $G_{i,j}$ est une matrice orthogonale

Soit $G_{i,j}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de Givens. Par définition, $G_{i,j}(\theta)$ est la matrice identité I_n dont les éléments aux positions (i,i), (i,j), (j,i) et (j,j) sont remplacés respectivement par

$$\cos\theta, \quad \sin\theta, \quad -\sin\theta, \quad \cos\theta.$$

Ainsi, toutes les colonnes de $G_{i,j}(\theta)$ coïncident avec celles de la base canonique, sauf les colonnes i et j, qui sont données par

$$g_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \cos\theta \\ \vdots \\ -\sin\theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sin\theta \\ \vdots \\ \cos\theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

où les composantes non nulles apparaissent aux positions i et j.

Montrons que les colonnes de $G_{i,j}(\theta)$ sont orthonormales.

Norme des colonnes g_i et g_j.

On a

$$\|g_i\|^2 = \cos^2\theta + (-\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

ainsi $\|g_i\| = 1$.

De même,

$$\|g_j\|^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

ainsi $\|g_j\| = 1$.

Or les autres colonnes de $G_{i,j}(\theta)$ sont celles de la base canonique, donc elles sont de norme 1.

Orthogonalité des colonnes g_i et g_j.

On calcule leur produit scalaire :

$$g_i^T g_j = \cos\theta\sin\theta + (-\sin\theta)\cos\theta = 0.$$

Ainsi, g_i et g_j sont orthogonales.

Orthogonalité avec les autres colonnes.

Or les autres colonnes sont des vecteurs de la base canonique, ayant des composantes nulles aux positions i et j. Ainsi, leur produit scalaire avec g_i et g_j est nul.

On a donc montré que toutes les colonnes de $G_{i,j}(\theta)$ sont orthonormales. Ainsi,

$$G_{i,j}(\theta)^T G_{i,j}(\theta) = I_n.$$

Or, par définition, une matrice dont les colonnes sont orthonormales est une matrice orthogonale.

On conclut que $G_{i,j}(\theta)$ est une matrice orthogonale.

(b) Choix de l'angle θ

On considère la matrice de Givens

$$G_{1,2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

On cherche un angle θ tel que

$$G_{1,2}(\theta)v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha e_1.$$

Calculons le produit :

$$G_{1,2}(\theta)v = \begin{pmatrix} \cos\theta\, v_1 - \sin\theta\, v_2 \\ \sin\theta\, v_1 + \cos\theta\, v_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on veut

$$\sin\theta\, v_1 + \cos\theta\, v_2 = 0.$$

On suppose que $(v_1, v_2) \neq (0,0)$. Posons

$$r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

On choisit alors

$$\cos\theta = \frac{v_1}{r}, \qquad \sin\theta = -\frac{v_2}{r}.$$

Vérifions que ce choix annule la deuxième composante :

$$\sin\theta\, v_1 + \cos\theta\, v_2 = \left(-\frac{v_2}{r}\right) v_1 + \left(\frac{v_1}{r}\right) v_2 = -\frac{v_1 v_2}{r} + \frac{v_1 v_2}{r} = 0.$$

Ainsi, la deuxième composante est nulle.

Calculons la première composante :

$$\cos\theta\, v_1 - \sin\theta\, v_2 = \frac{v_1^2}{r} + \frac{v_2^2}{r} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{r} = r.$$

Ainsi,

$$G_{1,2}(\theta)v = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$\alpha = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Enfin, comme $\cos\theta = \frac{v_1}{r}$ et $\sin\theta = -\frac{v_2}{r}$, il existe toujours un angle $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ satisfaisant ces relations.

On conclut que l'on peut toujours choisir un angle θ tel que

$$G_{1,2}(\theta)v = \alpha e_1, \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

(c)

Le programme `LSQGivens.m` résout le problème de moindres carrés $\min_x \|b - Ax\|_2$ à l'aide de la décomposition QR par rotations de Givens. On rejoue les rotations stockées dans M dans le même ordre qu'elles ont été appliquées, ce qui revient à calculer $Q^T b$ implicitement, puis on résout $Rx = (Q^T b)_{1:n}$ par substitution inverse.

L'étude de l'erreur commise lorsqu'on approxime la dérivée de $f(x) = e^x$ par différence finie est effectuée dans `testGivens.m`. On obtient :

```
C     = 0.057557
alpha = 0.728688
norm(x_giv - x2) = 1.1116e-14
```

La solution coïncide presque avec celle de l'opérateur Matlab `A\b` à la précision machine qui est de l'ordre e-16 , ce qui valide l'implémentation. On retrouve $\alpha \approx 0.7287$, cohérent avec les résultats obtenus par MGS et HBG.

(d)

Le programme `GivensFactors.m` extrait les matrices Q et R à partir de M produit par `GivensQR`. On reconstruit $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en appliquant les rotations de Givens dans l'ordre direct à I_n, sans jamais former explicitement les matrices $G_{i,j}$.

Dans `testGivens.m`, on compare `GivensFactors`, `HBGQR` et la commande `qr` native de Matlab sur les matrices de Hilbert H_n pour $5 \leq n \leq 12$:

n	orth_Giv	orth_HBG	orth_qr	res_Giv	res_HBG	res_qr
5	2.22e-16	4.44e-16	4.44e-16	1.11e-16	2.22e-16	5.00e-16
6	6.66e-16	6.66e-16	4.44e-16	1.11e-16	4.44e-16	4.44e-16
7	6.66e-16	4.44e-16	4.44e-16	2.22e-16	4.44e-16	4.44e-16
8	4.44e-16	5.55e-16	4.44e-16	1.11e-16	2.22e-16	1.11e-16
9	3.96e-16	1.22e-15	5.55e-16	1.11e-16	5.00e-16	2.22e-16
10	3.70e-16	6.66e-16	6.66e-16	1.11e-16	1.11e-16	3.89e-16
11	3.00e-16	5.55e-16	6.66e-16	2.22e-16	2.22e-16	2.22e-16
12	4.44e-16	4.44e-16	4.44e-16	1.39e-16	2.78e-16	2.22e-16

On observe que les trois méthodes maintiennent l'orthogonalité de Q et le résidu $\|A - QR\|$ à la précision machine $\epsilon \approx 2.2 \times 10^{-16}$ pour tout n, indépendamment du mauvais conditionnement de H_n.

Conclusion : Les rotations de Givens atteignent la même précision que `HBGQR` . Les deux algorithmes étant fondés sur des transformations orthogonales exactes, ils préservent l'orthogonalité de Q même pour des matrices très mal conditionnées, contrairement à la méthode de Gram-Schmidt modifiée.