

Devoir 1 : Algèbre linéaire numérique

Salem Nkunda Nyisingize

Février 2026

Exercice 1 : Normes matricielles

(a) Montrer que $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

Par définition,

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right|.$$

Si $\|x\|_\infty = 1$, alors pour tout i ,

$$\left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \sum_j |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_j |a_{ij}| \|x\|_\infty = \sum_j |a_{ij}|,$$

donc $\|A\|_\infty \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

Soit p maximisant $\sum_j |a_{pj}|$ et définissons $x_j = \text{sgn}(a_{pj})$ (et $x_j = 1$ si $a_{pj} = 0$). Alors $\|x\|_\infty = 1$ et

$$\|A\|_\infty \geq \|Ax\|_\infty \geq \left| \sum_j a_{pj} x_j \right| = \sum_j |a_{pj}| = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Ainsi,

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

(b) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$

On utilise, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

Alors

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\sqrt{n} \|Ax\|_\infty}{\|x\|_2} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\sqrt{n} \|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sqrt{n} \|A\|_\infty.$$

De même,

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_\infty} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2/\sqrt{n}} = \sqrt{n} \|A\|_2,$$

d'où $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2$.

(c) Montrer que $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

On a

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^T A).$$

Pour toute norme matricielle subordonnée et toute matrice M ,

$$\rho(M) \leq \|M\|.$$

En particulier,

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^T A) \leq \|A^T A\|_\infty.$$

Par submultiplicativité de la norme ∞ ,

$$\|A^T A\|_\infty \leq \|A^T\|_\infty \|A\|_\infty.$$

Or, par définition des normes 1 et ∞ ,

$$\|A^T\|_\infty = \|A\|_1.$$

Ainsi,

$$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty,$$

et en prenant la racine carrée,

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}.$$

(d) Soit $A = uv^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Montrer que $\|A\|_F = \|A\|_2 = \|u\|_2 \|v\|_2$ et $\|A\|_\infty = \|u\|_\infty \|v\|_1$.

On a $a_{ij} = (uv^T)_{ij} = u_i v_j$.

Norme de Frobenius.

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |u_i v_j|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i^2 v_j^2 = \left(\sum_{i=1}^m u_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n v_j^2 \right) = \|u\|_2^2 \|v\|_2^2,$$

d'où $\|A\|_F = \|u\|_2 \|v\|_2$.

Norme subordonnée $\|\cdot\|_2$. Pour tout $x \neq 0$,

$$Ax = u(v^T x) \Rightarrow \|Ax\|_2 = |v^T x| \|u\|_2 \leq \|v\|_2 \|x\|_2 \|u\|_2,$$

donc $\|A\|_2 \leq \|u\|_2 \|v\|_2$. De plus, pour $x = v/\|v\|_2$ (si $v \neq 0$),

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|u\|_2 |v^T(v/\|v\|_2)| = \|u\|_2 \|v\|_2,$$

donc $\|A\|_2 = \|u\|_2 \|v\|_2$ (le cas $v = 0$ est trivial).

Norme ∞ .

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max_i \sum_j |u_i v_j| = \max_i \left(|u_i| \sum_{j=1}^n |v_j| \right) = \left(\max_i |u_i| \right) \left(\sum_{j=1}^n |v_j| \right) = \|u\|_\infty \|v\|_1.$$

(e) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible, de valeurs singulières $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$. Soit E telle que $A + E$ est singulière.

Comme $A + E$ est singulière, il existe $x \neq 0$ tel que

$$(A + E)x = 0.$$

Donc

$$Ex = -Ax.$$

En prenant la norme euclidienne et en utilisant la définition de la norme opérateur,

$$\|E\|_2 \|x\|_2 \geq \|Ex\|_2 = \|Ax\|_2.$$

Par définition de la plus petite valeur singulière σ_n ,

$$\|Ax\|_2 \geq \sigma_n \|x\|_2 \quad \text{pour tout } x.$$

Comme $x \neq 0$, on en déduit

$$\|E\|_2 \geq \sigma_n.$$

Pour l'égalité, soit $A = U\Sigma V^T$ une décomposition en valeurs singulières de A et soient u_n et v_n les vecteurs singuliers associés à σ_n . En posant

$$E = -\sigma_n u_n v_n^T,$$

on a $\|E\|_2 = \sigma_n$ et

$$(A + E)v_n = 0,$$

donc $A + E$ est singulière.

Exercice 2 : Conditionnement d'un système linéaire

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma > 0.$$

(a) Calcul de $\kappa_\infty(A)$

$$[A|I] = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - \gamma R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$\|A\|_\infty = 1 + \gamma, \quad \|A^{-1}\|_\infty = 1 + \gamma, \quad \boxed{\kappa_\infty(A) = (1 + \gamma)^2}.$$

(b) Sensibilité à une perturbation de b

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \Rightarrow A\delta x = \delta b \Rightarrow \delta x = A^{-1}\delta b.$$

Donc

$$\|\delta x\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|\delta b\|_\infty.$$

De plus, comme $b = Ax$,

$$\|b\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty \Rightarrow \|x\|_\infty \geq \frac{\|b\|_\infty}{\|A\|_\infty}.$$

Ainsi,

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \boxed{(1 + \gamma)^2 \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}}.$$

Conditionnement : comme $\kappa_\infty(A) = (1 + \gamma)^2$, le problème est bien conditionné si γ est petit, et mal conditionné si γ est grand.

(c) Cas où la borne est atteinte

Choisir

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = Ax = \begin{pmatrix} 1 + \gamma \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\delta x = A^{-1}\delta b = \begin{pmatrix} 1 + \gamma \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \kappa_\infty(A) \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}}.$$

Exercice 3 : La formule de Sherman–Morrison

(a) Montrer que $I + uv^T$ est inversible si et seulement si $v^T u \neq -1$

Nous savons qu'une matrice est inversible si et seulement si son noyau est trivial :

$$\ker(A) = \{0\}.$$

Posons

$$A = I + uv^T.$$

Calculons l'image du vecteur u :

$$Au = (I + uv^T)u.$$

En distribuant,

$$(I + uv^T)u = Iu + (uv^T)u.$$

Comme $Iu = u$, on obtient

$$= u + (uv^T)u.$$

Or $v^T u$ est un scalaire, donc

$$(uv^T)u = u(v^T u).$$

Ainsi,

$$Au = u + u(v^T u) = (1 + v^T u)u.$$

Si

$$v^T u = -1,$$

alors

$$Au = 0.$$

Comme $u \neq 0$, on a trouvé un vecteur non nul dans le noyau :

$$u \in \ker(A), \quad \ker(A) \neq \{0\}.$$

Donc la matrice $I + uv^T$ n'est pas inversible lorsque $v^T u = -1$.
Réciproquement, si $v^T u \neq -1$ et si $Ax = 0$, alors

$$x + u(v^T x) = 0.$$

En posant $\alpha = v^T x$, on obtient

$$x = -\alpha u.$$

En appliquant v^T des deux côtés,

$$\alpha = v^T x = -\alpha v^T u,$$

d'où

$$\alpha(1 + v^T u) = 0.$$

Comme $1 + v^T u \neq 0$, on a $\alpha = 0$, donc $x = 0$.

Ainsi,

$$\ker(A) = \{0\},$$

et la matrice est inversible.

$$\boxed{I + uv^T \text{ est inversible} \iff v^T u \neq -1.}$$

(b) Trouver α tel que $(I + uv^T)^{-1} = I + \alpha uv^T$

Nous cherchons un scalaire α tel que

$$(I + uv^T)(I + \alpha uv^T) = I.$$

Développons le produit :

$$(I + uv^T)(I + \alpha uv^T) = I + \alpha uv^T + uv^T + \alpha(uv^T)(uv^T).$$

Or,

$$(uv^T)(uv^T) = u(v^T u)v^T = (v^T u) uv^T,$$

car $v^T u$ est un scalaire.

Ainsi,

$$(I + uv^T)(I + \alpha uv^T) = I + (\alpha + 1 + \alpha v^T u) uv^T.$$

Pour que $B = I + \alpha uv^T$ soit l'inverse de $A = I + uv^T$, il faut que le coefficient de uv^T soit nul :

$$\alpha + 1 + \alpha v^T u = 0.$$

On obtient alors

$$\alpha(1 + v^T u) = -1,$$

d'où

$$\boxed{\alpha = -\frac{1}{1 + v^T u}}.$$

Nous avons donc trouvé α (ou σ) tel que B soit l'inverse de A .

(c) Trouver une formule explicite pour $(L + uv^T)^{-1}$

On commence par factoriser :

$$L + uv^T = L(I + L^{-1}uv^T).$$

Posons

$$z = L^{-1}u.$$

Alors

$$L^{-1}uv^T = zv^T,$$

et donc

$$L + uv^T = L(I + zv^T).$$

Par la sous-question (b), on sait que

$$(I + zv^T)^{-1} = I - \frac{1}{1 + v^T z} zv^T,$$

si

$$1 + v^T z \neq 0.$$

Comme $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, on obtient

$$(L + uv^T)^{-1} = (I + zv^T)^{-1}L^{-1}.$$

En remplaçant $z = L^{-1}u$, cela donne

$$(L + uv^T)^{-1} = \left(I - \frac{1}{1 + v^T L^{-1}u} L^{-1}u v^T \right) L^{-1}.$$

On peut aussi écrire la formule sous la forme classique de Sherman–Morrison

:

$$\boxed{(L + uv^T)^{-1} = L^{-1} - \frac{L^{-1}u v^T L^{-1}}{1 + v^T L^{-1}u}.$$

(d) Implémentation

L'algorithme du point (d) a été implémenté en Matlab dans le fichier `ShermanMorrison.m`. Ce fichier résout le système $(L + uv^T)x = b$ lorsque L est triangulaire inférieure inversible, en appliquant la formule de Sherman–Morrison.

(e) Tests numériques

Les tests demandés pour $n = 5, 10, 20, 40, 100$ (génération aléatoire de L, u, v, b , calcul du résidu $r = b - Ax$ et de sa norme) sont effectués dans le fichier `test_sherman.m`. Les sorties affichent notamment la norme du résidu et une mesure relative

$$\frac{\|r\|}{\|A\| \|x\| + \|b\|}.$$

(f) Coût de l'algorithme et comparaison avec Gauss

Dans l'algorithme du point (d), on effectue :

1. une résolution triangulaire $Lw = u$: coût C_L ;
2. le calcul de σ (produit scalaire $v^T w$) : coût $O(n)$;
3. une résolution triangulaire $Ly = b$: coût C_L ;

4. le calcul $x = y + \sigma w(v^T y)$: deux produits scalaire/vecteur, coût $O(n)$.

Donc le coût total est

$$\boxed{2C_L + O(n)}.$$

Pour une matrice triangulaire inférieure, une résolution $Ly = b$ par substitution avant a un coût

$$C_L = O(n^2),$$

donc l'algorithme Sherman–Morrison a un coût global

$$\boxed{O(n^2)}.$$

En comparaison, l'élimination de Gauss appliquée à une matrice dense $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ coûte

$$\boxed{O(n^3)}.$$

Ainsi, pour la matrice $A = L + uv^T$, la méthode de Sherman–Morrison est **moins coûteuse** que l'élimination de Gauss (surtout lorsque n est grand).